BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ОЦЕНКИ НОРМ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А.Р.АЛИЕВ
Бакинский Государственный Университет

В работе рассматривается корректная краевая задача для одного класса операторно-дифференциальных уравнений порядка $4k+1$ *с переменными коэффициентами на положительной полуоси. Здесь для исследуемой краевой задачи указаны достаточные условия разрешимости в терминах операторных коэффициентов уравнений. При этом проведены оценки норм операторов промежуточных производных, участвующих в возмущенной части уравнений, которые имеют существенную роль в установлении точных условий разрешимости. Отметим, что главная часть изучаемых уравнений терпит разрыв.*

Пусть H -сепарабельное гильбертово пространство, A - самосопряженный положительно-определенный оператор в H.

Введем следующие гильбертовые пространства (см.[1]):

$$L_2(R_+;H)=\left\{v(t):\|v\|_{L_2(R_+;H)}=\left(\int_0^{+\infty}\|v(t)\|_H^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty\right\},$$

$$W_2^{4k+1}(R_+;H)=\left\{v(t):\|v\|_{W_2^{4k+1}(R_+;H)}=\left(\int_0^{+\infty}\left(\left\|v^{(4k+1)}(t)\right\|_H^2+\left\|A^{4k+1}v(t)\right\|_H^2\right)dt\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty\right\},$$

где $R_+=[0;+\infty)$.

Здесь и в дальнейшем, производная $v^{(i)}\equiv\dfrac{d^iv}{dt^i}$ понимается в смысле теории обобщенных функций.

Под $L(X,Y)$ будем понимать множество линейных ограниченных операторов, действующих из гильбертова пространства X в другое гильбертова пространство Y, а $L_\infty(R_+;B)$ - множество B - значных существенно ограниченных оператор-функций в R_+, где B - банахово пространство.

Теперь перейдем к изучению следующей краевой задачи:

$$-u^{(4k+1)}(t)+\rho(t)A^{4k+1}u(t)+\sum_{j=1}^{4k+1}A_j(t)u^{(4k+1-j)}(t)=f(t),\ t\in R_+, \tag{1}$$

$$u^{(i)}(0)=0\,,\ i=\overline{0,2k-1}\,, \tag{2}$$

где $f(t)\in L_2(R_+;H)$, $u(t)\in W_2^{4k+1}(R_+;H)$, $A_j(t)$, $j=\overline{1,4k+1}$ - линейные, вообще говоря, неограниченные операторы, определенные почти при всех $t\in R_+$, а функция

$$\rho(t)=\begin{cases}\alpha, & \text{если } 0\le t\le T,\\ \beta, & \text{если } T<t<+\infty,\end{cases}$$

причем α,β - положительные, вообще говоря, не равные друг другу числа.

Определение 1. *Если вектор – функция $u(t)\in W_2^{4k+1}(R_+;H)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в R_+, тогда её будем называть регулярным решением уравнения (1).*

Определение 2. *Если при любом $f(t)\in L_2(R_+;H)$ существует регулярное решение уравнения (1), которое удовлетворяет краевым условиям (2) в смысле*

$$\lim_{t\to 0}\left\|A^{4k+\frac{1}{2}-i}u^{(i)}(t)\right\|_H=0\,,\ i=\overline{0,2k-1}\,,$$

и имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^{4k+1}(R_+;H)}\le const\|f\|_{L_2(R_+;H)}\,,$$

тогда будем говорить, что краевая задача (1), (2) регулярно разрешима.

Отметим, что изучение краевых задач для некоторых классов операторно-дифференциальных уравнений нечетного порядка с переменными коэффициентами проводилось в работах ряда авторов. К примеру, можно назвать работы Н.И.Юрчука [2], С.С.Мирзоева [3], А.Р.Алиева [4].

В данной работе, пользуясь найденными оценками норм операторов промежуточных производных, участвующих в возмущенной части уравнения (1), установлены достаточные условия регулярной разрешимости краевой задачи (1), (2). Необходимо заметить, что эти условия выражены лишь операторными коэффициентами уравнения (1).

Прежде изучим главную часть уравнения (1). Через $\dot{W}_2^{4k+1}(R_+;H;\{i\})$ обозначим подпространство пространства $W_2^{4k+1}(R_+;H)$:

$$\dot{W}_2^{4k+1}(R_+;H;\{i\})=\left\{v(t):v(t)\in W_2^{4k+1}(R_+;H),v^{(i)}(0)=0,\ i=\overline{0,2k-1}\right\}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Оператор M_0, действующий из пространства $\dot{W}_2^{4k+1}(R_+;H;\{i\})$ в пространство $L_2(R_+;H)$ следующим образом:*

$$M_0u(t)\equiv -u^{(4k+1)}(t)+\rho(t)A^{4k+1}u(t),\ u(t)\in\dot{W}_2^{4k+1}(R_+;H;\{i\}),$$

является изоморфизмом между этими пространствами.

Метод доказательства можно заимствовать из соответствующей теоремы работы [4].

Из теоремы 1 становится ясно, что норма $\|u\|_{W_2^{4k+1}(R_+;H)}$ эквивалентна норме $\|M_0u\|_{L_2(R_+;H)}$ в пространстве $\dot{W}_2^{4k+1}(R_+;H;\{i\})$.

Теперь обозначим через M_1 оператор, действующий из пространства $\dot{W}_2^{4k+1}(R_+;H;\{i\})$ в $L_2(R_+;H)$ следующим образом:

$$M_1u(t)\equiv\sum_{j=1}^{4k+1}A_j(t)u^{(4k+1-j)}(t),\ u(t)\in\dot{W}_2^{4k+1}(R_+;H;\{i\}).$$

Тогда имеет место следующее утверждение, которое нетрудно доказывается с применением теоремы о промежуточных производных [1; гл.1].

Лемма. *Пусть* $A_j(t)A^{-j}\in L_\infty(R_+;L(H,H))$, $j=\overline{1,4k+1}$. *Тогда оператор* M_1 *является непрерывным из* $\dot{W}_2^{4k+1}(R_+;H;\{i\})$ *в* $L_2(R_+;H)$.

Далее же исследуем краевую задачу (1), (2). Справедлива следующая условная

Теорема 2. *Пусть операторы* $A_j(t)A^{-j}$, $j=\overline{1,4k+1}$, *ограничены в* H, *причем выполняется неравенство*

$$\sum_{j=0}^{4k}a_j\sup_t\left\|A_{4k+1-j}(t)A^{-4k-1+j}\right\|_{H\to H}<1, \tag{3}$$

где a_j, $j=\overline{0,4k}$, *- некоторые положительные постоянные.*

Тогда краевая задача (1), (2) регулярно разрешима.

В силу ограниченности объема статьи наметим краткое доказательство теоремы 2.

Ясно, что при выполнении условий теоремы для всех вектор – функций $u(t)\in\dot{W}_2^{4k+1}(R_+;H;\{i\})$ справедливо неравенство

$$c\|u\|_{W_2^{4k+1}(R_+;H)}\geq\|M_\tau u\|_{L_2(R_+;H)}\geq d\|u\|_{W_2^{4k+1}(R_+;H)}, \tag{4}$$

где $\tau\in[0;1]$, $M_\tau=M_0+\tau M_1$, а положительные числа c и d не зависят от функции $u(t)$ и от параметра τ. Принимая во внимание (4) и используя метод продолжения по параметру τ, доказывается, что операторное уравнение $M_0u(t)+M_1u(t)=f(t)$ имеет единственное решение из пространства $\dot{W}_2^{4k+1}(R_+;H;\{i\})$ при всех $f(t)\in L_2(R_+;H)$.

Из теоремы 2 (а, именно, из неравенства (3)) получается, что для установления точных условий регулярной разрешимости краевой задачи (1), (2) возникает необходимость оценить нормы операторов промежуточных производных $A^{4k+1-j}\dfrac{d^j}{dt^j}$, $j=\overline{0,4k}$, через главную часть уравнения (1) в пространстве $\dot{W}_2^{4k+1}(R_+;H;\{i\})$.

Теорема 3. *Пусть* $u(t)\in\dot{W}_2^{4k+1}(R_+;H;\{i\})$. *Тогда имеют место следующие неравенства:*

$$\left\| A^{4k+1-j} u^{(j)} \right\|_{L_2(R_+;H)} \le \left(\frac{4k+1-j}{4k+1} \right)^{\frac{4k+1-j}{8k+2}} \left(\frac{j}{4k+1} \right)^{\frac{j}{8k+2}} \times$$

$$\times m_j \left[\max(\alpha;\beta) \right]^{\frac{j}{8k+2}} \left[\min(\alpha;\beta) \right]^{-\frac{8k+2-j}{8k+2}} \left\| M_0 u \right\|_{L_2(R_+;H)}, \; j = \overline{1,4k}, \tag{5}$$

$$\left\| A^{4k+1} u \right\|_{L_2(R_+;H)} \le \left[\min(\alpha;\beta) \right]^{-1} \left\| M_0 u \right\|_{L_2(R_+;H)}, \tag{6}$$

где $m_j = 2^{\frac{j}{4k+1}(k-1)(2k-1)}$, *если* $j = \overline{1,2k}$, *и* $m_j = 2^{\frac{4k+1-j}{8k+2}((4k+1)j-2k(2k+1))}$, *если* $j = \overline{2k+1,4k}$.

Здесь также дадим краткое указание доказательства теоремы 3 в силу ранее отмеченного обстоятельства.

Для доказательства неравенств (5), (6) пользуемся справедливостью при $u(t) \in \dot{W}_2^{4k+1}\left(R_+; H; \{i\}\right)$ неравенств

$$\left\| A^{4k+1-j} u^{(j)} \right\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \left\| A^{4k+2-j} u^{(j-1)} \right\|_{L_2(R_+;H)} \left\| A^{4k-j} u^{(j+1)} \right\|_{L_2(R_+;H)}, \; j = \overline{1,2k},$$

$$\left\| A^{4k+1-j} u^{(j)} \right\|^2_{L_2(R_+;H)} \le 2 \left\| A^{4k+2-j} u^{(j-1)} \right\|_{L_2(R_+;H)} \left\| A^{4k-j} u^{(j+1)} \right\|_{L_2(R_+;H)}, \; j = \overline{2k+1,4k},$$

и коэрцитивного неравенства

$$\left\| \rho^{-\frac{1}{2}}(t) u^{(4k+1)} \right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\| \rho^{\frac{1}{2}}(t) A^{4k+1} u \right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\| A^{\frac{4k+1}{2}} u^{(2k)}(0) \right\|^2_H \le \left[\min(\alpha;\beta) \right]^{-1} \left\| M_0 u \right\|^2_{L_2(R_+;H)}.$$

В результате, получим точные достаточные коэффициентные условия регулярной разрешимости краевой задачи (1), (2).

Теорема 4 *(основная теорема). Пусть операторы* $A_j(t)A^{-j}$, $j = \overline{1,4k+1}$, *ограничены в* H *и выполняется неравенство*

$$\sum_{j=1}^{4k} \left(\frac{4k+1-j}{4k+1} \right)^{\frac{4k+1-j}{8k+2}} \left(\frac{j}{4k+1} \right)^{\frac{j}{8k+2}} m_j \left[\max(\alpha,\beta) \right]^{\frac{j}{8k+2}} \times$$

$$\times \left[\min(\alpha,\beta) \right]^{-\frac{8k+2-j}{8k+2}} \sup_t \left\| A_j(t) A^{-j} \right\|_{H \to H} +$$

$$+ \left[\min(\alpha,\beta) \right]^{-1} \sup_t \left\| A_{4k+1}(t) A^{-4k-1} \right\|_{H \to H} < 1,$$

где $m_j = 2^{\frac{j}{4k+1}(k-1)(2k-1)}$, *если* $j = \overline{1,2k}$, *и* $m_j = 2^{\frac{4k+1-j}{8k+2}((4k+1)j-2k(2k+1))}$, $j = \overline{2k+1,4k}$.

Тогда краевая задача (1), (2) регулярно разрешима.

Замечание. Указанные в этой работе результаты при $\alpha = \beta = 1$ уточняют соответствующие результаты работы [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371с.
2. Юрчук Н.И. О граничных задачах для уравнений, содержащих в главной части операторы вида $\frac{d^{2m+1}}{dt^{2m+1}}+A$ // Дифференц.уравнения. 1974. Т.10. №4. С.759-762.
3. Мирзоев С.С. Вопросы теории разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними. Дисс….д.ф.-м.н. Баку: БГУ, 1994, 229с.
4. Aliyev A.R. On correct solvability of boundary-value problems for some classes of operator – differential equations of odd order with variable coefficients // Transactions of AS of Azerbaijan. Series of physical – technical and mathematical sciences. 2001. Vol.21. №1. PP.19-29.

SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİ VƏ BİR SİNİF ARALIQ TÖRƏMƏ OPERATORLARININ NORMALARININ QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ

A.R.ƏLİYEV

XÜLASƏ

İşdə müsbət yarımoxda bir sinif dəyişən əmsallı $4k+1$ - tərtibli operator-diferensial tənliклər üçün корреқt sərhəd məsələsinə baxılır. Burada tədqiq olunan sərhəd məsələsi üçün tənliyin operator əmsalları ilə ifadə olunan кafi həllolunma şərtləri göstərilmişdir. Həmçinin dəqiq həllolunma şərtlərin tapılmasında mühüm rolu olan tənliyin həyəcanlanmış hissəsində iştiraк edən aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətləndirilməsi aparılmışdır. Qeyd edəк кi, öyrənilən tənliкlərin baş hissəsi кəsilən əmsala maliкdir.

BOUNDARY-VALUE PROBLEMS AND ESTIMATIONS OF THE NORMS OF ONE CLASS OPERATORS OF INTERMEDIATE DERIVATIVES

A.R.ALIYEV

SUMMARY

Correct boundary-value problem for one class operator-differential equations of the order $4k+1$ with variable coefficients on the positive semi-axis is considered in the paper. Sufficient conditions of solvability for the investigated problem are shown in terms of operator coefficients of the equations. In this case there are given estimations of norms of the operators of intermediate derivatives, taking part in the perturbed part of the equations, which have the essential role in determining the exact solvability conditions. We note that the main part of studied equations has discontinuity.